ديناميكية لاكرنج Lagrangian Dynamics

مقدمة

ان قانون نيوتن في الحركة اثبت بشكل جيد امكانية استخدامه في حل مسائل الميكانيك الكلاسيكي واعطاء الفهم العميق للطبيعة وقوانينها ومع ذلك فأن تطبيق قوانين نيوتن للمسائل المعقدة يمكن ان يكون صعباً جداً وخصوصاً عند تطبيق ذلك على حركة نظام أما تكون طريقة حركته معقدة جداً او يتطلب نظام احداثيات غير الديكارتية لوصفها أو قد يكون النظام ذو حركة مقيدة على سطح معين او قد يحتوي النظام عدة جسيمات ولا يقتصر على جسم واحد.

أن ديناميكية لاكرنج تشير الى تطبيق عدة عمليات مختلفة للحصول على معادلات حركة النظام. لقد ساهم العالم الفرنسي جوزيف لويس لاكرنج Joseph Louis Lagrange (1736–1813) في حل قانون نيوتن الثاني F=ma بطريقة مختلفة وتعتبر معادلات لاكرنج اعادة صياغة لميكانيك نيوتن وتزداد استخدامها في التطبيقات الهندسية ومعادلات لاكرنج قادت الى مفهوم الهملتوني واستخدامه ايضاً في الميكانيك الكمي ومجالات الفيزياء الاخرى.

في حالة منظومة متكونة من N من الجسيمات نحتاج بصورة عامة الى 3N من الاحداثيات لتعيين موضع جميع الجسيمات في في وقت واحد بصورة كاملة (الشكل العام للمنظومة). اما اذا فرضت قيود على المنظومة فنحتاج الى عدد من الاحداثيات اقل من 3N لتعيين الشكل العام للمنظومة.

ويتطلب بصورة عامة اصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام لمنظومة معينة. وسوف نرمز لهذه الاحداثيات بالشكل الاتي :

$$q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n$$

والتي تسمى بالاحداثيات المعممة. فاذا كانت المنظومة متكونة من جسيم واحد فيمكن كتابة الاحداثات الديكارتية كدوال للاحداثيات المعممة على النحة التالي:

$x = x(q)$ درجة حرية واحدة (حركة على خط مستقيم)

$x = x(q_1, q_2)$

$y = y(q_1, q_2)$ درجتا حرية (حركة على سطح)

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$ ثلاث درجات حرية (الحركة في فضاء)

ويمكن ايجاد معادلة لاكرنج بدلالة الاحداثيات المعممة من خلال قانون نيوتن الثاني والطاقة الحركية والكامنة حيث تكون دالة لاكرنج كما يلي :

$$L = T - V$$

حيث ان T تمثل الطاقية الحركية و V الطاقة الكامنة

ويمكن كتابة معادلات لاكرنج على النحو التالي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

ويمكن ايجاد معادلات الحركة لاي منظومة محافظة بسهولة اذا عرفنا دالة لاكرنج بدلالة المحاور مناسبة.

<u>بعض تطبيقات معادلات لاكرنج</u>

الطريقة العامة لايجاد معادلات الحركة لمنظومة هي كما يلي:

1. اختيار محاور مناسبة لتمثيل شكل المنظومة العام.
2. ايجاد الطاقة الحركية T كدالة لهذه المحاور ومشتقتها بالنسبة للزمن.
3. ايجاد الطاقة الكامنة كدالة للاحداثيات.
4. ايجاد دالة لاكرنج L=T−V .

<u>تطبق معادلة لاكرنج .</u>

<u>مثال :-</u>

قذف جسيم كتلته m يتحرك في مجال محافظ في مستوي xy وكانت له طاقتي الجهد (كامنه) والحركة كالتالي :

$$V = mgy, \qquad T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

اوجد دالة لاكرنج واوجد معادلتي لاكرنج للحركة في اتجاه محوري xy .

الحل:

دالة لاكرنج هي كالتالي :

$$L = T - V$$
$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

معادلتي الحركة :

في اتجاه محور x او في اتجاه الاحداثي المعمم x وهي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (1)$$

في اتجاه محور y هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad (2)$$

يجب ايجاد قيم المشتقات الجزئية في المعادلتين (1و2) كل على حدى ثم نوجد معالدلة الحركة لكل محور:

محور x :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد ان :

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

تمثل معادلة الحركة على المحور x

محور y :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

بالتعويض في (2) نجد ان :

$$m\ddot{y} = -mg \qquad \Rightarrow \ddot{y} = -g$$

تمثل معادلة الحركة على المحور y

مثال : جسيم منفرد في مجال مركزي.

لإيجاد معادلات لاكرنج للحركة لجسم يتحرك في مستوي تحت تأثير قوة مركزية , سوف

نختار الإحداثيات القطبية للحل حيث للجسم درجتا حرية لأنه يتحرك في مستوي أي أن q1=r ,q2=Θ عندئذ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$V = V_{(r)}$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V_{(r)}$$

وبتطبيق معادلات لاكرنج نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \qquad (2)$$

المشتقات الجزئية المناسبة هي كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - F_r$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r$$
$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$
$$\ddot{r} = \frac{mr\dot{\theta}^2 + F}{m}$$

يمثل معادلة الحركة على المحور x

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \ddot{\theta}mr^2$$

أي أن

$$\ddot{\theta}mr^2 = 0$$

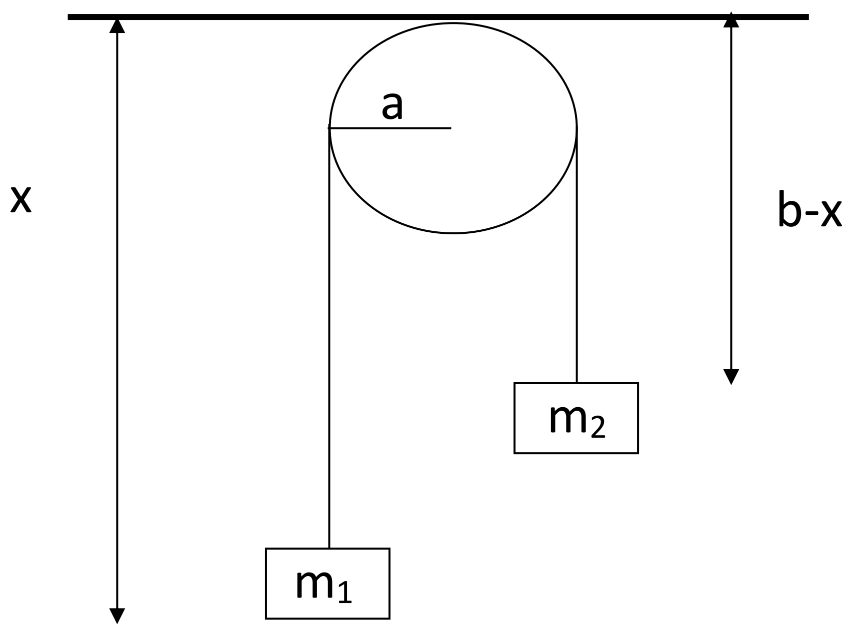
وهي تمثل معادلة الحركة لهذا الجسيم على المحور y

<u>مثال : ماكنة أتود</u>

تتألف ماكنة أتود من كتلتين m1,m2 مربوطتين بخيط طوله b ثابت ويمر على بكرة نصف قطرها a , المطلوب هو حساب تعجيل المنظومة .

الحل

للمنظومة درجة حرية واحدة وسنفرض أن المسافة الشاقولية من البكرة إلى الكتلة m1 هي x كما هو مبين في الشكل



وواضح أن الانطلاق الزاوي للبكرة هو $\frac{\dot{x}}{a}$ حيث a يمثل نصف القطر أذن الطاقة الحركية للمنظومة هي:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}}{a}$$

حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للبكرة وتعطى الطاقة الكامنة كما يلي:

$$V = -m_1 gx - m_{2g}(b - x)$$

وإذا أهملنا الاحتكاك فدالة لاكرنج تكون كما يلي:

$$L = T - V$$
$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)x + m_2 gb$$

ومن معادلات لاكرنج نحصل على

$$\frac{d}{dt} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

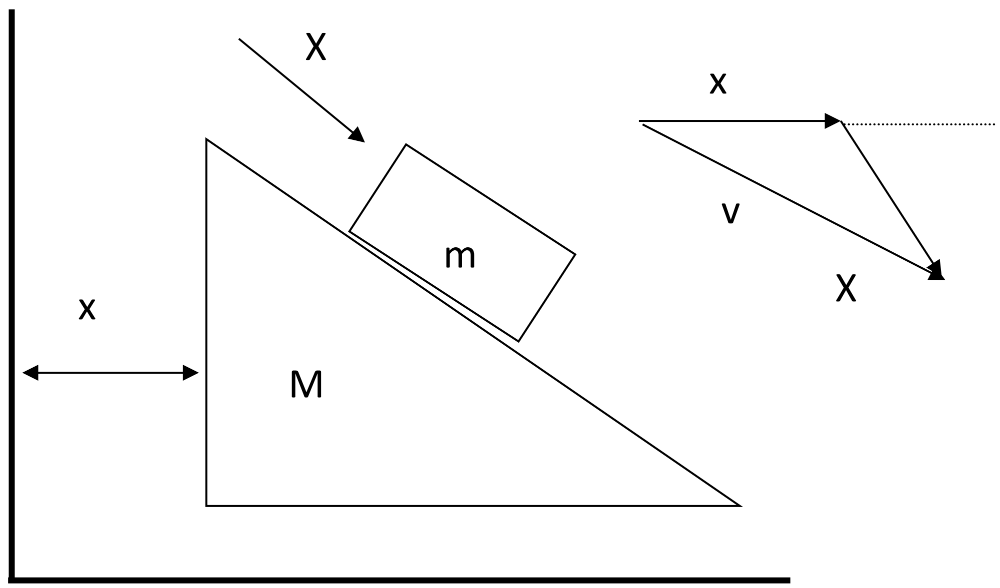
نحصل على

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$
$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}}$$

حيث أن$\ddot{x}$ تمثل التعجيل المنظومة.اذا كانت m1>m2 نلاحظ ان m1 تهبط بتعجيل ثابت , بينما اذا كانت m1<m2 عندئذ ترتفع m2 بتعجيل ثابت , والحد $\frac{I}{a^2}$في المقام يبين تأثير القصور الذاتي للبكرة.

مثال : جسم ينزلق على سطح مائل متحرك

جسم كتلته m ينزلق على سطح مائل أملس كتلته M وزاوية ميله θ والأخير يستطيع ان ينزلق بحرية على سطح أفقي كما في الشكل :



الحل

في هذا المثال هناك درجتا من الحرية هما الإحداثيات x ,X أي إزاحة السطح المائل الأفقي من نقطة المرجعية وإزاحة الجسم من نقطة مرجعية على السطح المائل على التوالي .

ومن المخطط السرعة المبينة في الشكل فأن:

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{X}\dot{x}\cos\theta \qquad (1)$$

أذن الطاقة الحركية للمنظومة T وبتعويض قيمة المعادلة (1) في (2) نحصل على:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \qquad (2)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(V^2 = \dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{X}\dot{x}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

والطاقة الكامنة للمنظومة هي

$$V = -mgX\sin\theta + const$$

والتي لا تحتوي على الاحداثي x لان السطح المائل يتحرك على السطح الأفقي

وعليه فأن دالة لاكرنج

L=T+V

أذن

$$L = \frac{1}{2}m(V^2 = \dot{X}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{X}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgX\sin\theta + const$$

ومن معادلة لاكرنج

$$\frac{d}{dt} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X}$$

نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\ddot{x} + \ddot{X}\cos\theta) + M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m(\ddot{X} + \ddot{x}\, cos\, \theta)$$
$$\frac{\partial L}{\partial X} = mg\, sin\, \theta$$

وعند تعويض هذه المشتقات الجزئية في معادلة لاكرنج نحصل على

$$m(\ddot{x} + \ddot{X}\, cos\, \theta) + M\ddot{x} = 0$$
$$m(\ddot{X} + \ddot{x}\, cos\, \theta) = mg\, sin\, \theta$$

ومن هاتين المعدلتين نحصل على تعجيل الجسم والسطح المائل

$$\ddot{X} = \frac{mg\, sin\, \theta}{1 - \frac{m\, cos^2\, \theta}{m + M}}$$
$$\ddot{x} = -\frac{g\, sin\, \theta\, cos\, \theta}{\frac{m + M}{m} - cos^2\, \theta}$$

مثال : اذا كان الفرق بين الطاقة الحركية والكامنة لمنظومة ميكانيكية يعطى بالعلاقة :

$$\boldsymbol{\frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - Cy^2}$$

حيث A,B ,C ثوابت اوجد معادلات الحركة لهذه المنظومة.

<u>الحل :</u>

ان دالة لاكرنج معطى بالعلاقة :

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - Cy^2 \qquad (1)$$

بما ان المنظومة تعمل على محورين فعليه معادلات لاكرنج تصبح :

1- المعادلات التي في المحور الاحداثي المعمم x هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (2)$$

2- المعادلات التي في المحور الاحداثي المعمم y هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad (3)$$

يجب ايجاد الاشتقاقات المطلوبة لحل المعادلات اعلاه وهي :

بالنسبة للمحور x فان:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{(A + By^2)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{(A + By^2)\ddot{x} \quad - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A + By^2)^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

نعوض (4) و (5) في (2) نحصل على معدلات لاكرنج للمحور x :

$$\frac{(A + By^2)\ddot{x} \quad - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A + By^2)^2} = 0$$

اذا لا يوجد تعجيل على هذا المحور

اما المحور y فان :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \ddot{y} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-\dot{x}^2(4By)}{4(A + By^2)^2} - 2Cy \qquad (7)$$

بتعويض (6) و (7) في (3) نحصل على معادلات لاكرنج للمحور y :

$$\ddot{y} = \frac{-\dot{x}^2(4By)}{4(A + By^2)^2} - 2Cy$$

وهي تمثل تعجيل ومعادلات الحركة للمنظومة